

REPUBLIQUE DU SENEGAL
Un peuple-Un but-Un foi
MINISTERE DE LA FORMATION PROFESSIONNELLE DE L'APPRENTISSAGE ET DE L'ARTISANAT
DIRECTION DE LA FORMATION PROFESSIONNELLE ET TECHNIQUE
LYCEE TECHNIQUE ANDRE PEYTAVIN DE SAINT-LOUIS
TEL: 33 961 10 80 / FAX: 33 961 11 55 / E-MAIL : ltapsl@orange.sn

Année Scolaire : 2018/2018 Classe : 1ière S3 TD : Barycentre de n points

Exo 01 : Soit ABC un triangle, B' et C' sont les milieux respectifs des segments $[AC]$ et $[AB]$.

I et J sont les points du segment $[BC]$ tels que $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

1. **a)** Déterminer b et c pour que I soit le barycentre de $\{(B,b);(C,c)\}$..
   b) Déterminer b' et c' pour que J soit le barycentre de $\{(B,b');(C,c')\}$..
2. Soit H le point défini par $\overrightarrow{C'H} = \frac{3}{5}\overrightarrow{C'J}$. H est le barycentre de $\{(C',t);(J,s)\}$. Déterminer t et s.
3. Montrer que H est le barycentre de $\{(A,\alpha);(B,\beta)(C,\delta)\}$ α, β et δ étant des réels à déterminer.
4. **a)** Exprimer $\overrightarrow{HI}$ en fonction de $\overrightarrow{HB}$ et $\overrightarrow{HC}$ puis $\overrightarrow{HB'}$ en fonction de $\overrightarrow{HA}$ et $\overrightarrow{HC}$.
   b) En déduire que l'on a $3\overrightarrow{HI} + 2\overrightarrow{HB'} = \vec{0}$ et que les points I, H et B' sont alignés.
5. Soit K le point défini par : $\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ Comparer $\overrightarrow{IH}$ et $\overrightarrow{IK}$.

Exo 02 : ABC est un triangle, I est le point de la droite (BC) tel que $3\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$, J est le point de la droite (AC) tel que, $3\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JC} = \vec{0}$, $K * [AB]$. On se propose de montrer que les droites (AI), (BJ) et (CK) sont concourantes.

1. Faire une figure précise.
2. On note $G = \{(A,3);(B,3);(C,1)\}$
   a) Montrer que $G = \{(I,4);(A;3)\}$ .En déduire que $G \in (AI)$.
   b) Montrer que G est aussi le barycentre de $\{(J,4);(B;3)\}$. En déduire que $G \in (BJ)$.
   c) Montrer que G appartient aussi à la droite (CK).
   d) Conclure.

Exo 03 : ABC est un triangle .

1) Construire le barycentre G de $(A,1)$, $(B,2)$ et $(C,3)$. M étant un point quelconque du plan, exprimer $\left\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}\right\|$ en fonction de MG .
2) Construire le barycentre K de $(A,8)$, $(B,-1)$ et $(C,-1)$. M étant un point quelconque du plan, exprimer $\left\|8\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right\|$ en fonction de MK .
3) Quel est l'ensemble des points M du plan tels que : $\left\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|8\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right\|$, le construire.
4) Soit (E) l'ensemble des points M tels que : $\left\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}\right\|$.
   Vérifier que le point C appartient à (E).
   Déterminer et construire (E).

Exo 04: On considère le triangle ABC.

Partie A. Des barycentres particuliers

1) Placer $I = \{(B;1);(C;2)\}$,
   $J = \{(A;2);(C;1)\}$ et $K = \{(A;4);(b;-1)\}$
2) **a.** Montrer que $\overrightarrow{KJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$..
   b. Montrer que $\overrightarrow{KI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.
   c. Qu'en déduit-on pour les points I,J et K ?

Partie B. Généralisation

3) Pour tout réel m, on note $G_m = \{(A;2m);(B;1-m);(C;2-m)\}$
   a. Justifier que G_m existe pour tout m réel.
   b. Reconnaitre les points G_0, G_1 et G_2.
4) a. Montrer que $\overrightarrow{AG} = \frac{1-m}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2-m}{3}\overrightarrow{AC}$.
   b. En déduire que $\overrightarrow{JG_m} = \frac{1-m}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.
5) Placer les points G_4, G_{-2} et G_7. Quel est l'ensemble des points G_m quand m décrit $\mathbb{R}$?

Exo 05 : A, B et C sont trois points non alignés du plan, A' le barycentre de $(A,0)$, (B,β) et $(C,-\gamma)$, B' celui de $(A,-\alpha)$, $(B,0)$ et (C,γ) et C' celui de (A,α), $(B,-\beta)$ et $(C,0)$. Les réels α, β et γ vérifiant les conditions les conditions d'existences de ces barycentres.

1) Démontrer que, pour tout point M du plan : $(\beta-\gamma)\overrightarrow{MA'} + (\gamma-\alpha)\overrightarrow{MB'} + (\alpha-\beta)\overrightarrow{MC'} = \vec{0}$.

Démontrer que les points $A', B'\ et\ C'$ sont alignés .

2) Soit (x, y, z) un triplet de réels dont la somme n'est pas nulle, et soit P le barycentre des points $(A, x), (B, y)\ et\ (C, z)$. Démontrer que P est un point de la droite $(A'B'C')$ si, et seulement si : $\beta\gamma x + \gamma\alpha y + \alpha\beta z = 0$.

Exo 06 : Soit $A, B\ et\ C$ sont trois points non alignés. I le milieu de $[BC]$, et M le barycentre des points $(A, \alpha), (B, \beta)\ et\ (C, \gamma)$

1) Formuler une condition nécessaire et suffisante sur α, β, γ , pour que M vérifie successivement :
   a) $\overrightarrow{AM}$ est colinéaire à $\overrightarrow{BC}$.
   b) $\overrightarrow{IM}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$.
2) M satisfaisant à la fois aux conditions a) et b) , la droite (BM) coupe (AC) en J et la droite (CM) coupe (AB) en K .

   Calculer les rapports : $\dfrac{\overline{JA}}{\overline{JC}}$ et $\dfrac{\overline{KA}}{\overline{KB}}$

Exo 07 : Soit $A, B\ et\ C$ sont trois points non alignés. Soient $I = \{(A,1); (B,-1); (C,1)\}$ et $J = \{(A,-1); (C,2)\}$.

Soit $M = \{(A,\alpha); (B,\beta); (C,\gamma)\}$. Formuler une condition nécessaire et suffisante sur α, β, γ , pour que I, J, M soient alignés.

1) La droite (IJ) coupe (BC) en K et (AB) en L . Calculer $\dfrac{\overline{KB}}{\overline{KC}}$ et $\dfrac{\overline{LA}}{\overline{LB}}$. Déterminer $\lambda\ et\ \mu$ pour que L soit le barycentre de $\{(\mathrm{I}, \lambda), (\mathrm{J}, \mu)\}$.

Exo 08 : Soit $A, B\ et\ C$ sont trois points non alignés du plan et α, β, γ , réels vérifiant les conditions les conditions d'existences des barycentres suivants :

- G barycentre de $(A, \alpha), (B, \beta)\ et\ (C, \gamma)$.
- G_1 barycentre de $(A, -\alpha), (B, \beta)\ et\ (C, \gamma)$
- G_2 barycentre de $(A, \alpha), (B, -\beta)\ et\ (C, \gamma)$
- G_3 barycentre de $(A, \alpha), (B, \beta)\ et\ (C, -\gamma)$

1) Démontrer que les droites $(AG_1), (AG_2)\ et\ (AG_3)$ concourent en G
2) Démontrer que chacun des cotés du triangle $G_1G_2G_3$ passe par l'un des points A, B, C .

Exo 09 : Soit $A, B\ et\ C$ sont trois points non alignés du plan, et M, N, P, points tels que :

$\overrightarrow{MB} = \alpha\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{NC} = \beta\overrightarrow{NA}$, $\overrightarrow{PA} = \gamma\overrightarrow{PB}$.

Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base telle que : $\vec{i} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{AC}$

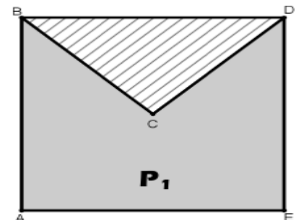
1) Exprimer, dans cette base, les vecteurs $\overrightarrow{NP}, \overrightarrow{PM}, \overrightarrow{MN}$.
2) Démontrer l'équivalence logique : $\alpha\beta\gamma = +1 \iff M, N, P$ sont alignés.

<u>COMPLEMENT : CENTRE D'INERTIE D'UN SOLIDE</u>

Exo 10 : $ABDE$ représente une plaque métallique **homogène** carrée de centre C . On retire la partie triangulaire BCD pour obtenir la plaque P_1 **pentagonale** $ABCDE$. On appelle G le centre d'inertie de la plaque BCD et O celui de la plaque P_1 .

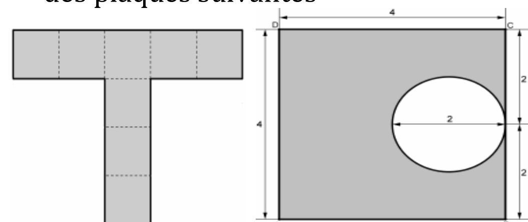
On cherche a construire O.

1) Justifier que $C = bar\{(\mathrm{G},1), (\mathrm{O},3)\}$



2) En déduire que $O = bar\{(\mathrm{G},-1), (\mathrm{C},4)\}$

Exo 11 : Déterminer le centre d'inertie de chacune des plaques suivantes



Exo 12 : Soit un triangle ABC et G le barycentre du système de points pondérés $(A, \alpha), (B, \beta)\ et\ (C, \gamma)$ avec $\alpha, \beta, et\ \gamma$ tous trois strictement positifs.

1) Montrer que G est interieur (strictement) au triangle ABC . On pourra pour cela utiliser le barycentre P des deux points pondérés $(B, \beta)\ et\ (C, \gamma)$ en précisant de quelles droites il est le point d'intersection.
2) Montrer que $\dfrac{PB}{PC} = \dfrac{\gamma}{\beta}$, puis que P est aussi le barycentre de B et C affectés des coefficients respectifs $Aire(PAC)\ et\ Aire(PBC)$, où $Aire(\ldots)$ désigne **l'aire** du triangle mis entre parenthèses.
3) En s'aidant des hauteurs issues l'une de B dans PAB , et l'autre de C dans PAC , montrer que $\beta, et\ \gamma$ sont aussi respectivement proportionnels aux aires des triangles $GAC\ et\ GAB$.
4) En déduire que les coefficients $\alpha, \beta, et\ \gamma$ sont respectivement proportionnels aux aires des triangles $GBC,\ GCA\ et\ GAB$.
5) Que se passe-t-il dans le cas particulier où G est le centre de gravité de ABC ?